



TITLE:

# $P(\omega)/\text{finite}$ 上のlimits(数学基礎論及びその応用)

AUTHOR(S):

加茂, 静夫

---

CITATION:

加茂, 静夫.  $P(\omega)/\text{finite}$ 上のlimits(数学基礎論及びその応用). 数理解析研究所講究録 1984, 540: 137-144

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98740>

RIGHT:

$\mathcal{P}(\omega)/\text{finite}$  上の limits

阪府大総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

$\mathcal{P}(\omega)$  上の quasi-order  $\leq^*$  を,  $x \leq^* y$  となるのは  $x \setminus y$  が finite のとき, で定める.  $x <^* y$  は,  $x \leq^* y$  かつ not  $y \leq^* x$  を意味する. quasi-order  $\leq^*$  による  $\mathcal{P}(\omega)$  上の同値関係を  $\sim$  で表わす.  $\omega$  の部分集合からなる  $k$ -sequence  $X = \langle x_\alpha \mid \alpha < k \rangle$  が,  $k$ -limit であるとは,  $X$  が  $<^*$ -下降列であり, 任意の  $\omega$  の無限部分集合  $Y$  に対して,  $\exists \alpha < k$  (not  $y <^* x_\alpha$ ) が成り立つこととする. 定義からすぐわかるように, 適当な cardinal  $k$  について,  $k$ -limit が存在する. そこで, 連続体仮説の下で,  $\omega_1$  は, limit が存在する唯一の cardinal となる. 更に, 連続体の濃度が  $\omega_2$  ( $2^\omega = \omega_2$ ) の場合には, 次の (A)  $\sim$  (C) の可能性が考えられる. (A)  $\exists \omega_1\text{-limit} + \neg \exists \omega_2\text{-limit}$ . (B)  $\neg \exists \omega_1\text{-limit} + \exists \omega_2\text{-limit}$ . (C)  $\exists \omega_1\text{-limit} + \exists \omega_2\text{-limit}$ . (A)  $\sim$  (C) のそれぞれが  $2^\omega = \omega_2$  と整合することは, よく知られている. まず, (A) をみたす model は, 連続体仮説の成り立つ universe に対して,

$\omega_2$  個の Cohen real を加える generic extension により得られる。  
 又, (B) は マルティンの公理と  $2^\omega = \omega_2$  から導かれる。更に,  
 (B) の model に  $\omega_1$  個の Cohen real を加える generic extension による  
 model では (C) が成り立つ。では, 連続体の濃度 ( $= 2^\omega$ ) が大  
 きい場合はどうなるか。この論文ではそれについて考えるが,  
 $\exists k$ -limit なら,  $\exists cf k$ -limit が成り立つから, regular cardinal  
 の limit に制限して考察を行う。そして, 次の結果を証明す  
 る。

定理 (一般連続体仮説)  $n$  を自然数とし,  $\kappa_0, \dots, \kappa_n$  と  
 $\lambda$  は regular cardinal で  $\omega_1 \leq \kappa_0 < \dots < \kappa_n \leq \lambda$  をみたすとする。  
 このとき, poset  $P$  で, 次の (i) から (iv) をみたすものが存在する。

- (i)  $P$  は countable chain condition をみたす,
- (ii)  $\Vdash_P "2^\omega = \lambda"$ ,
- (iii)  $m = 0, 1, \dots, n$  に対して,  $\Vdash_P "\exists \check{\kappa}_m\text{-limit}"$  となる。
- (iv)  $\theta$  が  $\kappa_0, \dots, \kappa_n$  以外の regular cardinal なら,  $\Vdash_P "\neg \exists \check{\theta}\text{-limit}"$   
 となる。

以下, この定理の証明のため, 一般連続体仮説を仮定し,  
 $\kappa_0, \dots, \kappa_n, \lambda$  : regular cardinals &  $\omega_1 \leq \kappa_0 < \dots < \kappa_n \leq \lambda$   
 とする。  $k = \kappa_n$ ,  $\bar{k} = \kappa_0$  と記す。

<< poset  $P$  の構成 >>  $T_\xi$  ( $\xi < \kappa$ ) による  $k$ -stage finite  
 support iteration  $S_\xi$  ( $\xi < \kappa$ ) を  $\xi$  に関する induction で次の様に

定める. ここで各  $\xi < \kappa$  に対して,  $G|\xi$  は  $V$ -generic on  $\mathcal{P}_\xi$  を,  
 $G_\xi$  は  $V[G|\xi]$ -generic on  $T_\xi$  を表わす.

1).  $\xi = 0$  のとき.

$$T_0 = 2^{<\omega} (= \{t; \exists k < \omega (t: k \rightarrow 2)\}),$$

$$a_0 = b_0 = \{k < \omega; \exists t \in G_0 (t(k) = 1)\}$$

とする.

2).  $\xi = \eta + 1$  のとき.

$$T_\xi = 2^{<\omega},$$

$$b_\xi = \{k < \omega; \exists t \in G_\xi (t(k) = 1)\},$$

$$a_\xi = a_\eta \cap b_\xi$$

とする.

3).  $\xi$  が limit のとき.

$$T_\xi = (\mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(\xi), \leq),$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ただし, } T_\xi \text{ の order は,} \\ (u, \alpha) \leq (v, \beta) \iff u \supset v \ \& \ \alpha \supset \beta \ \& \ u \setminus v \subset \bigcap_{\eta \in \beta} a_\eta \end{array} \right)$$

$$a_\xi = b_\xi = \bigcup \{u; \exists \alpha ((u, \alpha) \in G_\xi)\}$$

とする.

$S_\xi (\xi \leq \kappa)$  は, 定理の (iii) を成り立たせるための poset である.

次の補題 1 ~ 2 が成り立つ.

補題 1.  $\xi < \eta < \kappa$  とすると,

$$\Vdash_{\eta+1} "a_\eta \not\subset \phi \ \& \ a_\eta <^* a_\xi"$$

である。

補題 2.  $\forall \theta \leq \bar{\kappa} (\theta \geq \omega_1, \text{regular} \Rightarrow \Vdash_{\theta} " \langle \dot{a}_\xi \mid \xi < \check{\theta} \rangle : \check{\theta}\text{-limit} ")$

補題 3.  $S_\kappa$  は countable chain condition をみたす。更に,

$\forall W \subset S_\kappa (|W| = \omega_1 \Rightarrow \exists W_1 \subset W (|W_1| = \omega_1 \ \& \ W_1 : \text{pairwise compatible}))$  が成り立つ。

補題 2 より, poset  $\bar{P}$  を,

$$\bar{P} = S_{\kappa_0} \times \cdots \times S_{\kappa_n} \times \{f : \exists \alpha < \lambda (|\alpha| < \omega \ \& \ f : \alpha \rightarrow 2)\}$$

で定めれば,  $\bar{P}$  は定理の (i) ~ (iii) をみたす。そこで, 以下,  $\bar{P}$  を拡張して, (i) ~ (iv) をみたす poset  $P$  をつくる。

directed set  $I = (I, \leq)$  を,

$$I = \kappa_0 \times \cdots \times \kappa_n \times \mathcal{P}_{<\kappa}(\lambda)$$

$$(\xi_0, \dots, \xi_n, A) \leq (\eta_0, \dots, \eta_n, B) \iff \xi_0 \leq \eta_0 \ \& \ \cdots \ \& \ \xi_n \leq \eta_n \ \& \ A \subset B$$

で定める。

$X \subset \mathcal{P}(\omega)$  が strong finite intersection property (sfip) を持つとき, poset  $R_X = (\mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(X), \leq)$  を,

$$(u, \alpha) \leq (v, \beta) \iff u \supset v \ \& \ \alpha \supset \beta \ \& \ u \setminus v \subset \cap \alpha$$

で定める。  $R_X$  は strong countable chain condition をみたす poset であり,  $G$  を  $V$ -generic on  $R_X$  とし,  $a = \bigcup \{u : \exists \alpha ((u, \alpha) \in G)\}$  とおくと,  $a \subset \omega \ \& \ a \neq \emptyset \ \& \ \forall \alpha \in X (a \leq^* \alpha)$  が成り立つ。

各  $\bar{i} = (\xi_0, \dots, \xi_n, A) \in I$  に対して,  $\mathcal{Q}_\alpha(\bar{i})$  ( $\alpha < \bar{\kappa}$ ) による  $\bar{\kappa}$ -stage finite support iteration  $\mathcal{P}_\alpha(\bar{i})$  ( $\alpha \leq \bar{\kappa}$ ) を次の induction により

定める. ここで, 各  $\alpha < \bar{\kappa}$  に対して,  $G|\alpha$  は  $V$ -generic on  $P_\alpha(i)$  を表す. まず,

$$Q_0(i) = S_{\aleph_0} \times \cdots \times S_{\aleph_n} \times \{f; \exists \alpha \in A (|\alpha| < \omega \ \& \ f: \alpha \rightarrow 2)\}$$

とし,  $0 < \alpha < \bar{\kappa}$  に対して,  $V[G|\alpha]$  において,

$$Q_\alpha(i) = \text{the finite product of } \langle R_x \mid x \in \Gamma_\alpha(i) \rangle,$$

(ただし,  $\Gamma_\alpha(i) = \{X \subset \mathcal{P}(\omega); |X| < \kappa \ \& \ X \text{ は sfip を持つ}\})$

とする.  $P(i) = P_{\bar{\kappa}}(i)$  とおく.

各 stage  $\alpha$  で  $Q_\alpha(i)$  が countable chain condition をみたすから,  $P(i)$  も countable chain condition をみたす. 又,  $i \leq j$  のとき,  $Q_0(i)$  が  $Q_0(j)$  の complete な subposet になることと,  $Q_\alpha(i), Q_\alpha(j)$  ( $0 < \alpha < \bar{\kappa}$ ) の定めきから,  $P(i)$  は  $P(j)$  の complete な subposet になる. そこで, poset  $P$  を,

$$P = \bigcup_{i \in I} P(i)$$

で定める.  $P$  が定理で求める poset となることをみていく.

«  $P$  は countable chain condition をみたすこと »

$I$  が  $\sigma$ -closed な directed set であることと,  $P(i)$  ( $i \in I$ ) が countable chain condition をみたすことから, 容易に導かれる.

«  $\Vdash_P \aleph^\omega = \aleph^\lambda$  となること »

まず,  $|P| \leq \sum_{i \in I} |P(i)| \leq \kappa \cdot |I| = \lambda$  だから,

$$\Vdash_P \aleph^\omega \leq \aleph^\lambda$$

である.

便宜のため, 各  $p \in P$  に対して,  $p(0) = (\Delta_0^p, \dots, \Delta_n^p, f^p)$  と記す.

今,  $Q = \{p \in P; \text{supp}(p) = \{0\} \ \& \ \forall m \leq n (\Delta_m^p = \emptyset)\}$  とおくと,

$Q \cong \{f; \exists \alpha < \lambda (|\alpha| < \omega \ \& \ f: \alpha \rightarrow 2)\}$  となるから,

" $\Vdash_Q$  " $\lambda^\vee$  個の Cohen real over  $V^\vee$  が存在する"

が成り立つ. これと,  $Q$  が  $P$  の complete subposet であることより,

" $\Vdash_P$  " $\lambda^\vee$  個の Cohen real over  $V^\vee$  が存在する"

が成り立つ. そこで, " $\Vdash_P$  " $2^\omega \geq \lambda^\vee$ " である.

<< " $\forall m \leq n (\Vdash_P \exists k_m^\vee\text{-limit})$ " について >>

$P$  が countable chain condition をみたすことと,  $I$  が  $\sigma$ -closed により次の補題が成り立つ.

補題 4.  $\alpha$  を  $P$ -name とし, " $\Vdash_P \alpha < \omega$ " とすると, 適当な  $i \in I$  と  $P(i)$ -name  $\bar{\alpha}$  で " $\Vdash_P \alpha = \bar{\alpha}$ " となるものがある.

$\forall m \leq n (\Vdash_P \exists k_m^\vee\text{-limit})$  を示すため,

$m \leq n \ \& \ G : V\text{-generic on } P$

とする.  $H = \{ \Delta_m^p; p \in G \} \subset S_{k_m}$  とおく. このとき,

$H$  は  $V$ -generic on  $S_{k_m}$  となるから,  $S_\xi (\xi \leq k_m)$  と同時に

定めた names  $a_\xi, b_\xi (\xi < k_m)$  の解釈がある. それ等を,  $a_\xi^H,$

$b_\xi^H (\xi < k_m)$  とする.  $X = \langle a_\xi^H \mid \xi < k_m \rangle$  とおく.  $X$  が,

$V[G]$  において,  $k_m$ -limit となることを示すが, まず, 補題 1

より,  $X$  は長さ  $k_m$  の  $<^*$ -下降列である. そこで,

$V[G] \models \forall y < \omega (y \neq \emptyset \Rightarrow \exists \xi < k_m (\text{not } y <^* a_\xi^H))$

を示せばよい。それを示すため、 $y \in V[G]$  を、 $y \subset \omega$  &  
 $y \neq \emptyset$  となる set とする。補題4により、

$$y \in V[G \cap P(\bar{i})]$$

となる  $\bar{i} = (\xi_0, \dots, \xi_m, A) \in I$  が存在する。  $\delta = k_m + 1$  とおく。

このとき、 $b_\delta^H$  は Cohen real over  $V[G \cap P(\bar{i})]$  となるから、

$$y \setminus b_\delta^H \neq \emptyset$$

である。これと、 $a_\delta^H \subset b_\delta^H$  より、 $y \setminus a_\delta^H \neq \emptyset$ 。

$$\therefore \text{not } y \leq^* a_\delta^H$$

«  $\forall \theta: \text{regular} ( \forall m \leq n (\theta \neq k_m) \Rightarrow \Vdash_P " \neg \exists \check{\sigma}\text{-limit} " )$  »

背理法で示すため、

$$(1) \quad \theta: \text{regular} \ \& \ \forall m \leq n (\theta \neq k_m)$$

$$(2) \quad \Vdash_P " \langle y_\delta \mid \delta < \check{\theta} \rangle: \check{\theta}\text{-limit} "$$

とする。各  $\delta < \theta$  に対して、 $\bar{i}_\delta = (\xi_0^\delta, \dots, \xi_n^\delta, A^\delta) \in I$  と  $\alpha_\delta < \bar{\kappa}$

を、 $y_\delta$  が  $P_{\alpha_\delta}(\bar{i}_\delta)$ -name となるようにとっておく。このとき、

(1) により、 $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in k_0 \times \dots \times k_n$ ,  $\alpha < \bar{\kappa}$  で

$$D = \{ \delta < \theta; \xi_0^\delta \leq \xi_0 \ \& \ \dots \ \& \ \xi_n^\delta \leq \xi_n \ \& \ y_\delta: P_\alpha(\bar{i}_\delta)\text{-name} \}$$

が cofinal in  $\theta$  となるものがとれる。

Case 1.  $\theta < \kappa$  のとき。

$$A = \bigcup_{\delta \in D} A^\delta \text{ とおく。 } |A| \leq \sum_{\delta \in D} |A^\delta| < \kappa \text{ となる。 } \text{そこ}$$

で、 $\bar{i} = (\xi_0, \dots, \xi_n, A)$  とおくと、

$$i \in I \ \& \ \forall \delta \in D ( y_\delta: P_\alpha(\bar{i})\text{-name} )$$



となる。そこで、 $P_\alpha(i)$ -name  $X$  を、

$$\Vdash_{P_\alpha(i)} "X = \{y_\delta; \delta \in D\}"$$

で定めれば、 $\Vdash_{P_\alpha(i)} "X \in \Gamma_\alpha(i)"$  となるから、 $P_{\alpha+1}(i)$ -name  $C$  で、

$$\Vdash_{P_{\alpha+1}(i)} "C \subset \omega \ \& \ C \neq \emptyset \ \& \ \forall x \in X (C \leq^* x)"$$

となるものが存在する。  $D$  は  $\theta$  で cofinal だから、

$$\Vdash_P "C \subset \omega \ \& \ C \neq \emptyset \ \& \ \forall \delta < \theta^\vee (C \leq^* y_\delta)"$$

となる。これは、(2) と矛盾する。

Case 2.  $k < \theta$  のとき。

各 bijection  $\varphi: \lambda \rightarrow \lambda$  に対して、 $\varphi$  を canonical に拡張した  
 $\{f: \exists x \subset \lambda (|x| < \omega \ \& \ f: x \rightarrow 2)\}$  上の permutation  $\hat{\varphi}$  が得ら  
 れるが、それを更に、 $P$  上の permutation にまで拡張できる。  
 この事実と、 $\Delta$ -system lemma によりこの場合は矛盾となる。